这次是做题环节。

似乎 MathML 对矩阵之类的支持挺不好的，所以为了阅读体验，建议去看 PDF 版本，按钮就在上面（藏得比较深）。

1 密度矩阵，谱定理

对于 $t \in \mathbb{R}$，令 $\rho_t = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & t \\ t & 1 \end{pmatrix}$。

(a) 计算 ρ_t 的特征值和正交归一的特征基。要让 ρ_t 是密度矩阵，t 的可能取值有哪些?

解. $\det(\lambda I - \rho_t) = 0$，也就是 $\begin{vmatrix} 1-2\lambda & t \\ t & 1-2\lambda \end{vmatrix} = 0$。那么，$\lambda = \frac{1}{2}(1 \pm t)$。

至于特征向量，

$$\begin{pmatrix} 1-2\lambda & t \\ t & 1-2\lambda \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \mathbf{0}$$

$\lambda = \frac{1}{2}(1+t)$ 时，特征向量为 $\binom{1}{1}$；$\lambda = \frac{1}{2}(1-t)$ 时，则为 $\binom{1}{-1}$。我们需要正交归一的基，那么除以 $\sqrt{2}$ 就可以了。

要让 ρ_t 是密度矩阵，只需要让它是 Hermitian 的半正定矩阵，而且 $\mathrm{Tr}\ \rho_t = 1$ 即可。只有半正定会对 t 有约束，也就是 $\frac{1}{2}(1 \pm t) \geq 0$，那么 $-1 \leq t \leq 1$。

(b) 将 ρ_t 写作两个纯态的加权和。

解. 容易想到这两个纯态就是 $|v_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ 和 $|v_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$。所以，

$$\rho_t = \frac{1}{2}|v_1\rangle\langle v_1| + \frac{1}{2}|v_2\rangle\langle v_2|$$

(c) 证明当且仅当 $\mathrm{Tr}(\rho^2) = 1$ 的时候，ρ 是纯态。

解. 假设 $\mathrm{Tr}(\rho^2) = 1$。令 $\rho = \begin{pmatrix} a & b \\ b^* & 1-a \end{pmatrix}$，那么

$$\rho^2 = \begin{pmatrix} a^2 + \|b\|^2 & b \\ b^* & (1-a)^2 + \|b\|^2 \end{pmatrix}$$

所以 $\mathrm{Tr}(\rho^2) = a^2 + (1-a)^2 + 2\|b\|^2 = 1$，这说明 $a = a^2 + \|b\|^2$。

要让 ρ 是纯态，就必须找到 $|\psi\rangle = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ 使得 $\rho = |\psi\rangle\langle\psi|$，也就是

$$\begin{pmatrix} a & b \\ b^* & 1-a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \|x\|^2 & xy^* \\ x^*y & \|y\|^2 \end{pmatrix}$$

显然 $\|x\|, \|y\|$ 已经被 a 所确定。为了让它有解，我们只需要让 $bb^* = a(1-a)$ 即可，而 $a = a^2 + \|b\|^2$ 已经说明了这一点。

再假设 $\rho = |\psi\rangle\langle\psi|$ 是纯态。那么只要计算一下，就可以得知 $\mathrm{Tr}(\rho^2) = 1$，过程和上面的基本上完全一样。

2 相干

令 $|\psi_\pm\rangle = \frac{1}{2}\big(\sqrt{3}|0\rangle \pm |1\rangle\big)$，$\tau = \frac{3}{4}|0\rangle\langle 0| + \frac{1}{4}|1\rangle\langle 1|$。

(a) 计算 $|\psi_+\rangle, |\psi_-\rangle$ 等比例混合所得到的混合态。它可以与 τ 区分吗?

解.

$$\begin{aligned}\rho &= \frac{1}{2}|\psi_+\rangle\langle\psi_+| + \frac{1}{2}|\psi_-\rangle\langle\psi_-| \\ &= \frac{1}{8}\begin{pmatrix} 3 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{8}\begin{pmatrix} 3 & -\sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \tau\end{aligned}$$

既然密度矩阵相同，它们是不可区分的。

(b) 计算 computational basis 下，$|\psi_+\rangle\langle\psi_+|$ 和 τ 的测量结果分布。

解. 对于 τ，它自然是 $\frac{3}{4}$ 得到 $|0\rangle$，$\frac{1}{4}$ 得到 $|1\rangle$。

对于 $|\psi_+\rangle\langle\psi_+|$，它等于 $\frac{1}{4}\begin{pmatrix} 3 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 1 \end{pmatrix}$，所以同样也是 $\frac{3}{4}$ 得到 $|0\rangle$，$\frac{1}{4}$ 得到 $|1\rangle$。

(c) 计算 $H\tau H^\dagger$，并由此得到 $|\psi_+\rangle\langle\psi_+|$ 和 τ 在 Hadamard 基下的测量结果分布。

解.

$$\begin{aligned}H\tau H^\dagger &= \frac{1}{8}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{8}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{8}\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

这说明 τ 在 H-基下有 $\frac{1}{2}$ 概率得到 $|+\rangle$，$\frac{1}{2}$ 概率得到 $|-\rangle$。

再考虑 $|\psi_+\rangle\langle\psi_+|$。

$$H|\psi_+\rangle = \frac{1}{2\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2\sqrt{2}}\begin{pmatrix} \sqrt{3}+1 \\ \sqrt{3}-1 \end{pmatrix}$$

所以

$$\begin{aligned}H|\psi_+\rangle\langle\psi_+|H^\dagger &= \frac{1}{8}\begin{pmatrix} \sqrt{3}+1 \\ \sqrt{3}-1 \end{pmatrix}\left(\sqrt{3}+1, \sqrt{3}-1\right) \\ &= \frac{1}{8}\begin{pmatrix} 4+2\sqrt{3} & 2 \\ 2 & 4-2\sqrt{3} \end{pmatrix}\end{aligned}$$

因此得到 $|+\rangle, |-\rangle$ 的概率分别是 $\dfrac{4+2\sqrt{3}}{8}$ 以及$\dfrac{4-2\sqrt{3}}{8}$。

3 PVM

两个量子比特以 $\rho = |++\rangle\langle++|$ 形式被制备出来。考虑

$$M_{\text{even}} = |00\rangle\langle00| + |11\rangle\langle11|, M_{\text{odd}} = |01\rangle\langle01| + |10\rangle\langle10|$$

(a) 证明 $M_{\text{even}}, M_{\text{odd}}$ 是一组投影测量矩阵。

解. 首先，它们加起来是 I。

然后，M_{even} 和 M_{odd} 都是 Hermitian 的，而且都幂等。所以，它们构成一组投影测量矩阵。

(b) 计算测量的可能结果以及坍缩后的密度矩阵。它是否是纠缠态?

解. 首先看 M_{even}。我们有

$$M_{\text{even}}\rho = \frac{1}{4}\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1&1&1\\1&1&1&1\\1&1&1&1\\1&1&1&1\end{pmatrix}$$
$$= \frac{1}{4}\begin{pmatrix}1&1&1&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\1&1&1&1\end{pmatrix}$$

所以概率为 $\operatorname{Tr}(M_{\text{even}}\rho) = \frac{1}{2}$。测量后的状态是 $M_{\text{even}}\rho M_{\text{even}}$ 除以归一化系数，所以是

$$\rho' = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1&0&0&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\1&0&0&1\end{pmatrix}$$

M_{odd} 也是类似的，只不过换了一下顺序而已。

这个东西确实是纠缠态，毕竟不可能存在 $a\otimes b$ 使得它等于 ρ'。

(c) 如果分别对每个比特在 computational basis 下测量，结果又会如何呢?

解. 这会是 $|01\rangle, |10\rangle, |00\rangle, |11\rangle$ 中的某一种，概率各为 $\frac{1}{4}$。所以，一个非对角项都没有留下来。

4 纯化

令 $|\Psi_{AB}\rangle = \frac{1}{2}\big(\sqrt{3}|00\rangle + |11\rangle\big)$。

(a) 计算 $\rho_A = \operatorname{Tr}_B|\Psi\rangle\langle\Psi|$ 和 $\rho_B = \operatorname{Tr}_A|\Psi\rangle\langle\Psi|$。它们是否是纯态?

解. 写成矩阵形式的话，

$$|\Psi\rangle = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}\sqrt{3}\\0\\0\\1\end{pmatrix}$$

所以

$$\rho_\Psi = \frac{1}{4}\begin{pmatrix}3&0&0&\sqrt{3}\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\\sqrt{3}&0&0&1\end{pmatrix}$$

那么，对于 A 来说，我们可以将它看作是分块矩阵：

$$\rho_{\Psi_{AB}} = \begin{pmatrix}A_{00}&A_{01}\\A_{10}&A_{11}\end{pmatrix}$$

这样分块，是因为 A 的指标相同。前两个是 $|00\rangle, |01\rangle$，A 都是零；后两个是 $|10\rangle, |11\rangle$，A 都是 1。

所以 $\rho_B = \operatorname{Tr}_A|\Psi\rangle\langle\Psi|$ 是 $A_{00}+A_{11}$，它等于 $\frac{1}{4}\begin{pmatrix}3&0\\0&1\end{pmatrix}$。

对于 B 而言，需要稍微交换一下才能把属于它的部分放在一起。我们需要按照 B 指标相同来分块，而 1、3 列的 B 指标相同（均为零），2、4 列也是（均为 1），所以重新排列之后相当于把 2、3 列交换。同理，2、3 行也需要交换。不过所有这些都全为零，所以其实没变：

$$\rho_{\Psi_{BA}} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & \sqrt{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \sqrt{3} & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

那么同样分块之后对主对角线求和，就可以知道 $\rho_A = \mathrm{Tr}_B|\Psi\rangle\langle\Psi| = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ 了。

下面我们要检查这是不是纯态。如果它等于某个 $|\psi\rangle\langle\psi|$，那么令 $\psi = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$，就有

$$\frac{1}{4}\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \|a\|^2 & ab^* \\ a^*b & \|b\|^2 \end{pmatrix}$$

解得 $a = \frac{\sqrt{3}}{2}, b = \frac{1}{2}$。所以这确实是纯态。

(b) 说明 $|\Psi'\rangle = \frac{1}{2}\left(\sqrt{3}|0+\rangle + |1-\rangle\right)$ 也是 ρ_A 的纯化，并找到一个作用在 B 上的 U，将 Ψ 转化为 Ψ'。

解. 显然这个 $U = H$。

Ψ' 显然是纯态。要说明 Ψ' 是 ρ_A 的纯化，我们需要先将这个矩阵写出来。它等于

$$|\Psi'\rangle = \frac{1}{2\sqrt{2}}\begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ \sqrt{3} \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

所以

$$|\Psi'\rangle\langle\Psi'| = \frac{1}{8}\begin{pmatrix} 3 & 3 & \sqrt{3} & -\sqrt{3} \\ 3 & 3 & \sqrt{3} & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & \sqrt{3} & 1 & -1 \\ -\sqrt{3} & -\sqrt{3} & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

要考虑 $\rho_A = \mathrm{Tr}_B|\Psi'\rangle\langle\Psi'|$，我们就需要按照 B 的指标重新排列。

$$\rho_{\Psi'_{BA}} = \frac{1}{8}\begin{pmatrix} 3 & \sqrt{3} & 3 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 1 & \sqrt{3} & -1 \\ 3 & \sqrt{3} & 3 & -\sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & -1 & -\sqrt{3} & 1 \end{pmatrix}$$

最后加起来：

$$\mathrm{Tr}_B|\Psi'\rangle\langle\Psi'| = \frac{1}{8}\left(\begin{pmatrix} 3 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & -\sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & 1 \end{pmatrix}\right) = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

所以 Ψ' 也是 ρ_A 的纯化。

5 迹距离

(a) 令 $p = \mathrm{diag}(p_1, ..., p_d)$ 和 $q = \mathrm{diag}(q_1, ..., q_d)$ 为密度矩阵。证明

$$D(p,q)=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{d}\|p_i-q_i\|$$

解. 根据定义，$D(p,q)=\frac{1}{2}\,\|p-q\|_1$。这里的 $\|a\|_1$ 就是特征值的绝对值之和。对于 $p-q$，它的特征值自然是 p_i-q_i，所以即可证明。

(b) 令 $\rho=|0\rangle\langle 0|,\sigma=|+\rangle\langle +|$。计算 $\rho-\sigma$ 的特征值，迹距离和最大区分概率。

解. 直接展开，

$$\rho-\sigma=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}-\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1&-1\\-1&-1\end{pmatrix}$$

要计算特征值，就需要解方程

$$\det(2(\rho-\sigma)-2\lambda I)=4\lambda^2-2=0$$

所以 $\lambda=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$。那么，迹距离就是 $\frac{1}{\sqrt{2}}$（别忘了除以 2），最大区分概率则为 $\frac{2+\sqrt{2}}{4}$。